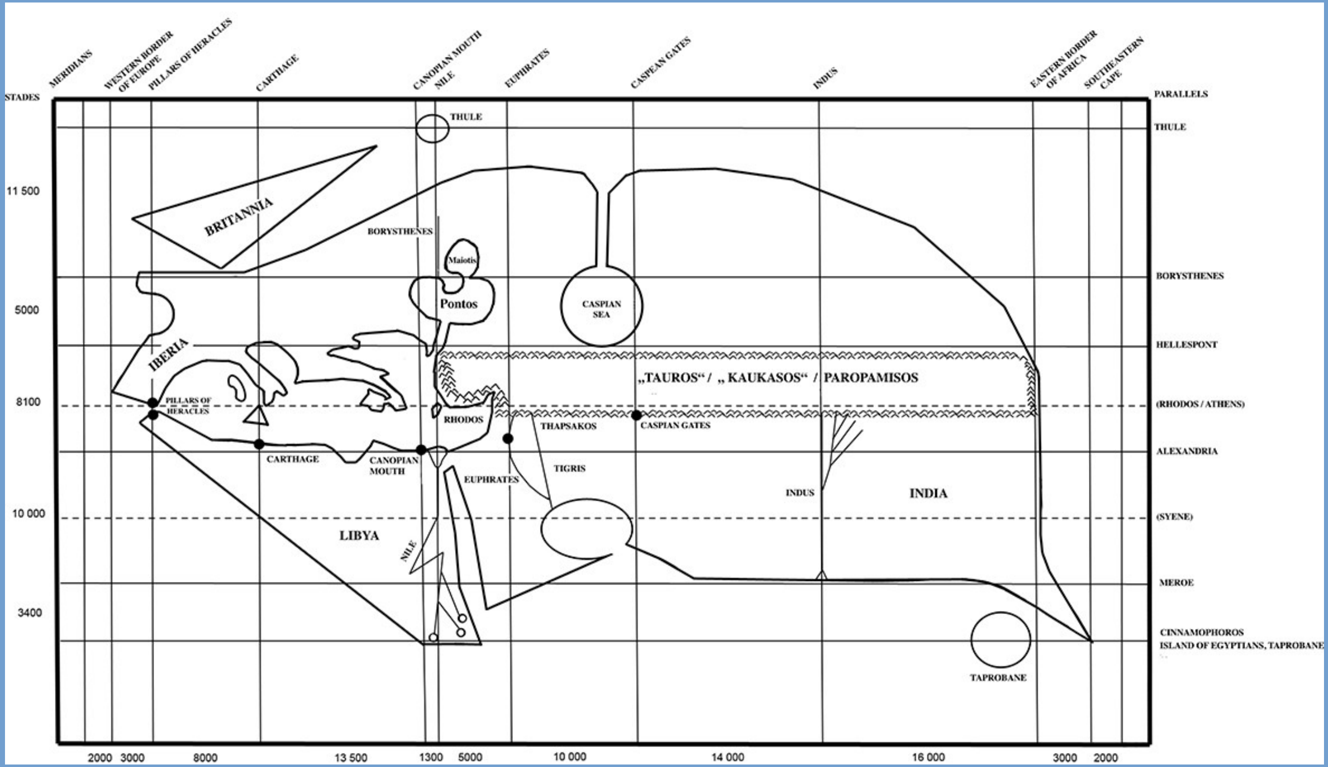
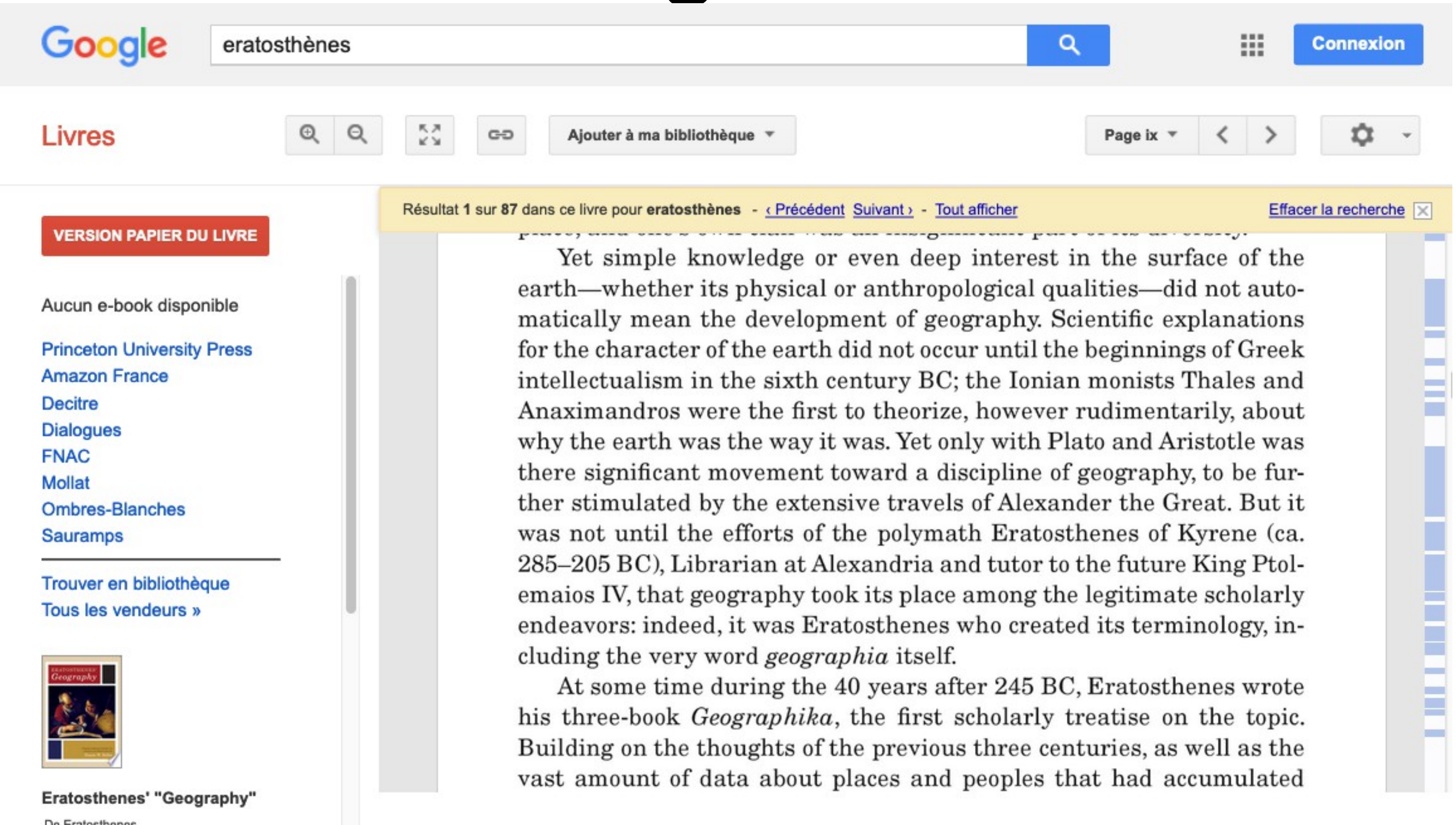
Mesurer la Terre : un problème de géographe ou d’astronome-géomètre ?



Eratosthène invente la géographie dans un ouvrage en trois tomes



Yet simple knowledge or even deep interest in the surface of the earth—whether its physical or anthropological qualities—did not automatically mean the development of geography. Scientific explanations for the character of the earth did not occur until the beginnings of Greek intellectualism in the sixth century BC; the Ionian monists Thales and Anaximandros were the first to theorize, however rudimentarily, about why the earth was the way it was. Yet only with Plato and Aristotle was there significant movement toward a discipline of geography, to be further stimulated by the extensive travels of Alexander the Great. But it was not until the efforts of the polymath Eratosthenes of Kyrene (ca. 285–205 BC), Librarian at Alexandria and tutor to the future King Ptolemaios IV, that geography took its place among the legitimate scholarly endeavors: indeed, it was Eratosthenes who created its terminology, including the very word *geographia* itself.

At some time during the 40 years after 245 BC, Eratosthenes wrote his three-book *Geographika*, the first scholarly treatise on the topic. Building on the thoughts of the previous three centuries, as well as the vast amount of data about places and peoples that had accumulated

Mais comment mesurer l’espace ?

- Ce sera notre problème : l’objet de cet exposé est de l’aborder avec vous avec les mathématiques connues à l’époque…
- Thalès serait l’auteur de l’idée que « *les angles opposés par le sommet sont égaux* », et que « *Deux angles égaux sur un segment égal donnent des triangles égaux* »… ce qui n’est pas non plus le théorème enseigné en France.

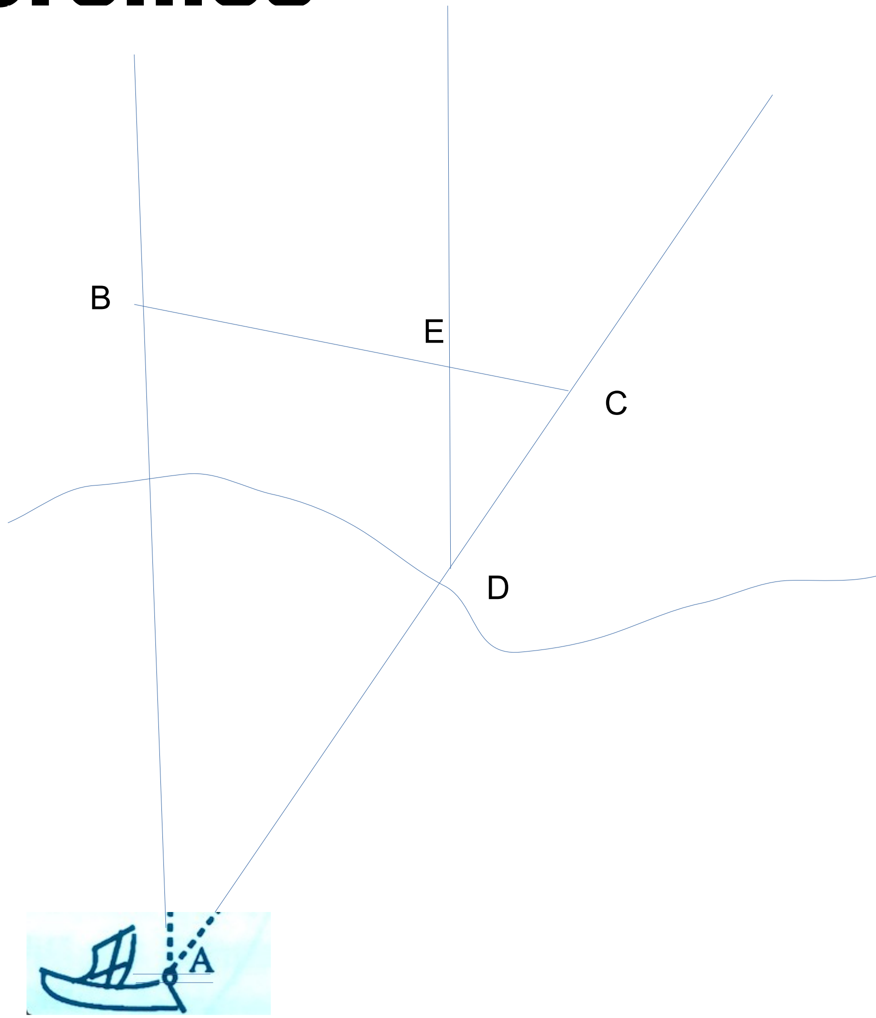
L'usage de ces théorèmes

Selon Tannery (1887) *La géométrie Grecque*,

pour mesurer une distance inaccessible, il faut « *rapporter en une position mesurable une grandeur hors d'atteinte* »

- On peut imaginer ce dispositif : (BC) base marquée, les visées de A, (BA) et (CA), les angles CBA et CED tracés au sol, D repéré comme intersection de (ED) et (CA).
- Alors *la mesure de CD (à terre) est à CA (la distance du bateau, en mer), ce que CE est à CB (à terre), on le note*

  CD:CA::CE:CB



L’égalité des rapports se conserve !

Le fait que la hauteur de la pyramide est égale à celle de son ombre portée, le jour où l’ombre portée de tout objet est égale à celle de son ombre, permet d’aller plus loin : *le schéma de l’idée ne peut être tracé qu’en plus petit*.

Le schéma est efficace parce que ***les égalités* sont conservées dans la représentation**. Tout mesurage dans les deux espaces montrera même que *le rapport des mesures* est conservé.

Après Thales (VIe ac.), ***l'espace est mesurable dans tous les lieux (même en mer) et toutes les directions (même en hauteur)***

Anaximandre (Ve ac.) observe que l'étoile polaire est fixe et que le cosmos semble tourner autour d'un axe. Il observe aussi la variation de sa hauteur selon le point d'observation.

Il formule l'hypothèse d'une Terre sphérique, comme le cosmos, ce qui rend compte de la variation des observations avec ce que nous appelons « la latitude ».

Une astronomie géométrique

a permet la géographie

A la demande d'Alexandre de Grand, Eratosthene (IIe ac.) fonde la géographie de *l'écoumène (la zone habitable).*

Apollonius (190 ac.) poursuit, puis Aristarque évalue les tailles respectives de la Lune et du Soleil, et Ptolémée (*Μαθηματικὴ σύνταξις*) développe l'astronomie géométrique.

Germaine Aujac a traduit Cleomedes

« *Sur la grandeur de la terre, il y a eu plusieurs estimations de la part des physiciens ; les meilleures de toutes sont celles d'Eratosthène et celle de Poseidônios ; la première use d'un procédé géométrique pour démontrer la grandeur de la terre ; celle de Poseidônios est plus simple. L'un et l'autre posent certaines hypothèses et, par les conséquences qu'ils tirent de ces hypothèses, mènent les démonstrations à leur terme.*

Cléomède poursuit

« Si donc le méridien qui passe par Rhodes et Alexandrie est divisé en 48 parties comme le zodiaque (4x12), *les sections en sont égales aux susdites sections du zodiaque : car lorsque des parties égales sont divisées en un nombre égal de sections, nécessairement les sections des grandeurs divisées sont égales entre elles. »*

(suite)

« *Ératosthène dit, ce qui est vrai, que Syène est sous le tropique d'été. Donc, à chaque fois que le Soleil, parvenu dans le Cancer, au solstice d'été, culmine exactement au méridien, <u>les gnomons des horloges</u> sont sans ombre, nécessairement puisque le Soleil est exactement à la verticale (cela se produit, dit-on, dans un rayon de 150 stades). A Alexandrie à la même heure les gnomons des horloges projettent une ombre, vu que cette cité est au nord de Syène. (…)* »

Un Scaphè gradué

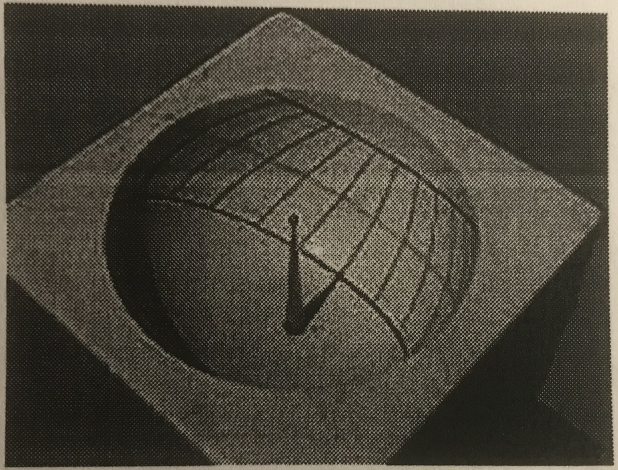


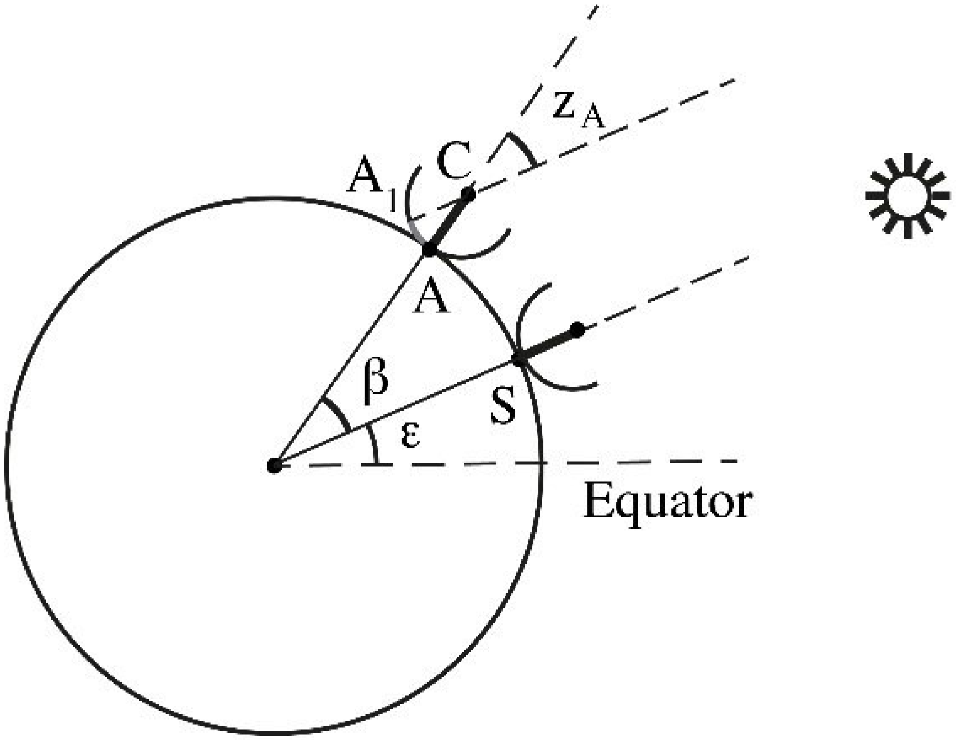
Figure 1 : Photographie d'un cadran solaire hémisphérique ou scaphe

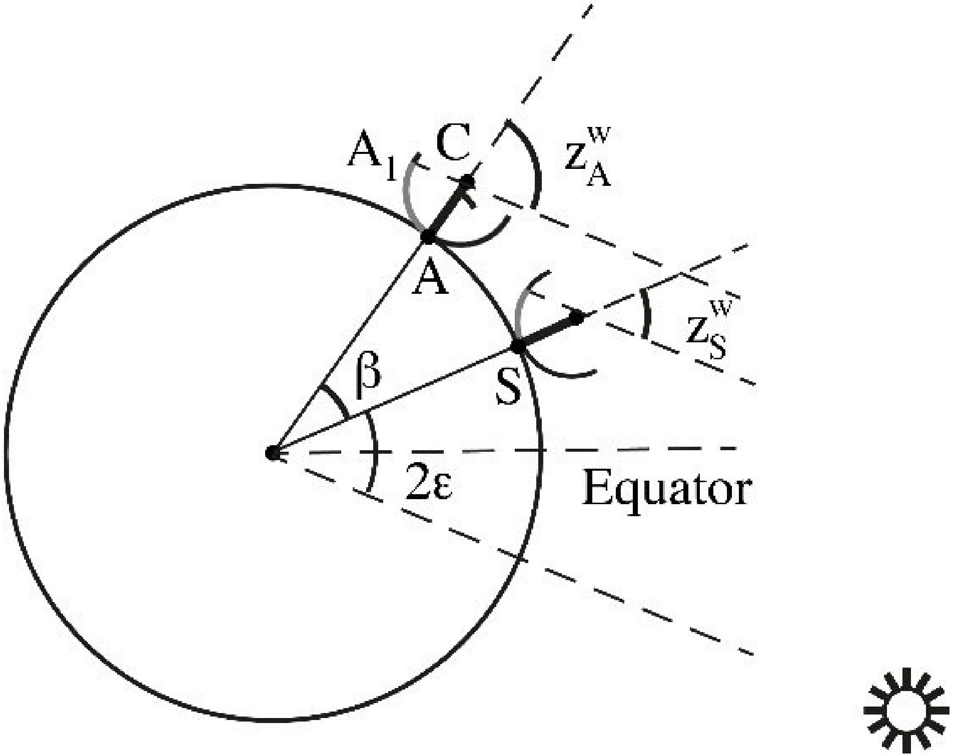
… en cadran solaire. Il est photographié à midi, au solstice d'été

(en 12 heures de jour inégales et en cercle équinoxial et solstices d'été/hiver dans l'autre sens.)

L’observation est-elle

astronomique ou géographique ?

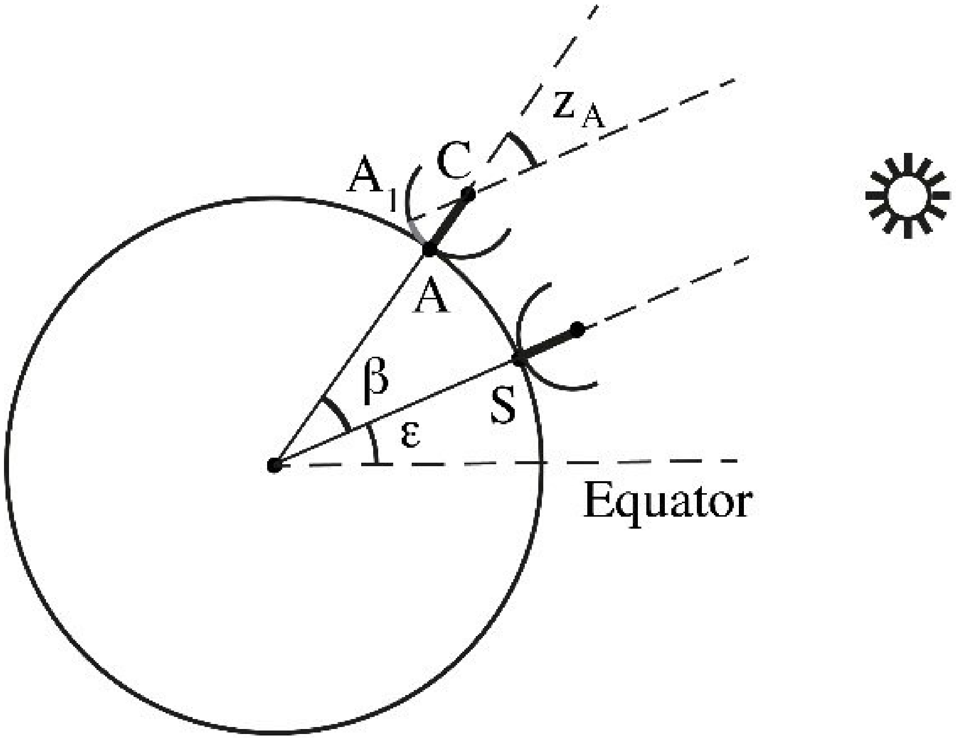


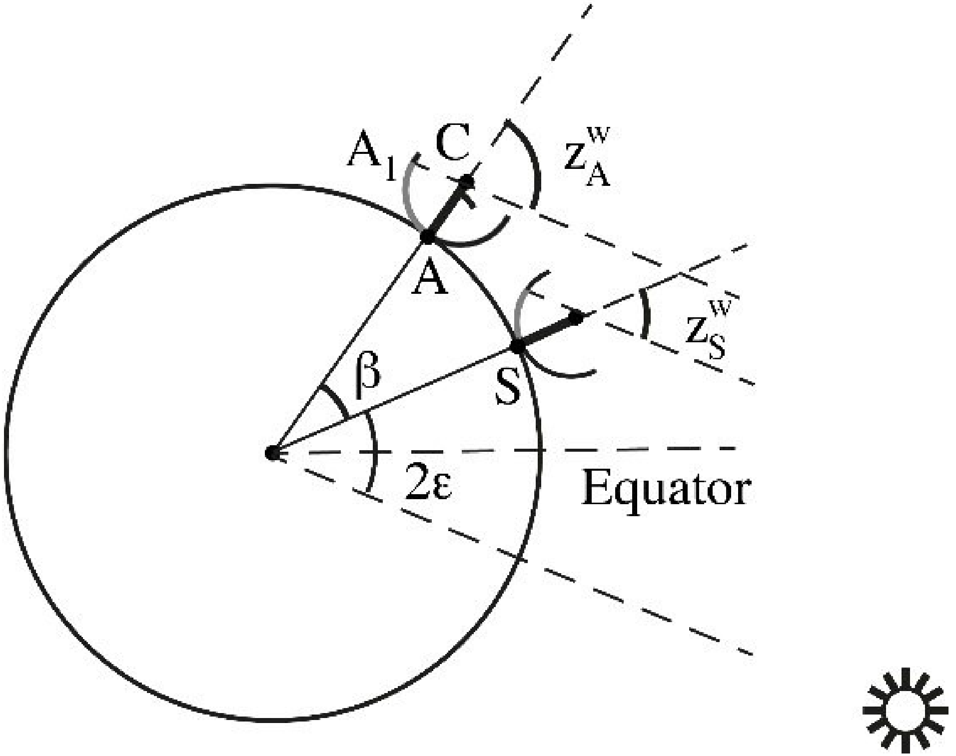


*« Posons en premier lieu, dans ce cas aussi, que Syène et Alexandrie sont sous le même méridien ; en second lieu, que la distance entre les villes est de 5000 stades ; en troisième lieu, que les rayons émis par différentes parties du Soleil sur différentes parties de la Terre sont parallèles, ce que les géomètres prennent pour hypothèse ; en quatrième lieu, ce qui est démontré par les géomètres, que les droites qui coupent des parallèles déterminent des angles alternes égaux ; en cinquième lieu, que les arcs interceptés par des angles égaux sont semblables, c'est-à-dire qu'**ils sont dans la même proportion et le même rapport avec leurs cercles propres**, ce qui est également démontré par les géomètres. Comme ces villes sont sous le même méridien ou grand cercle, si nous décrivons un arc DA de l'extrémité D de l'ombre du gnomon à la base même A du gnomon de l'horloge d'Alexandrie, l'arc en question sera une section du grand cercle de la scaphè, puisque la scaphè de l'horloge est située à l'aplomb d'un grand cercle. (...) »*

L’observation est-elle

astronomique ou géographique ?

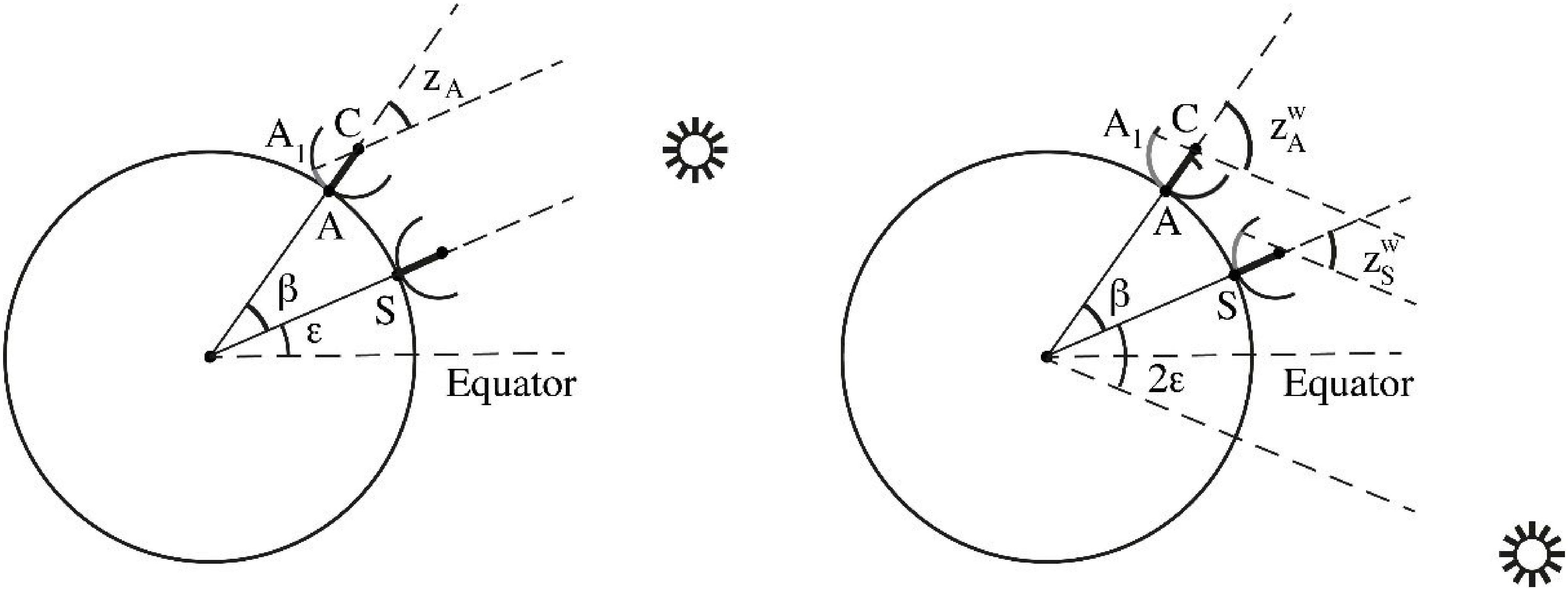




« Si donc nous imaginons des droites (EO) et (BO) prolongeant les deux gnomons à travers la terre, elles se rencontreront au centre de la terre, 0. Puisque l'horloge à Syène est située à la verticale du Soleil, si nous imaginons une droite allant du Soleil à l'extrémité B du gnomon de l'horloge, il n'y aura qu'une seule droite (BO) allant du Soleil au centre de la terre O. Si nous imaginons, à partir de la scaphè à Alexandrie, une autre droite (DE) partant par l'extrémité du gnomon E et, par l'extrémité E allant jusqu'au Soleil, cette droite et celle précédemment définie seront parallèles, puisqu'elles vont de différentes parties du Soleil à différentes parties de la terre. Or ces droites parallèles sont coupées par la droite (OE) qui va du centre de la terre O au gnomon placé à Alexandrie, ce qui produit des angles alternes égaux : l'un (AOS) est situé au centre de la terre, l'autre (AED) est situé à l'extrémité du gnomon (AE) à Alexandrie et de la droite (DE) menée depuis l'extrémité de son ombre en direction du Soleil en passant par la pointe E du gnomon. Sur celui-ci est construit l'arc DA qui va de l'extrémité D de l'ombre du gnomon à sa base A ; sur l'autre, celui qui est au centre de la terre O, est construit l'arc (AS) qui va de Syène S à Alexandrie A.

L'observation est-elle

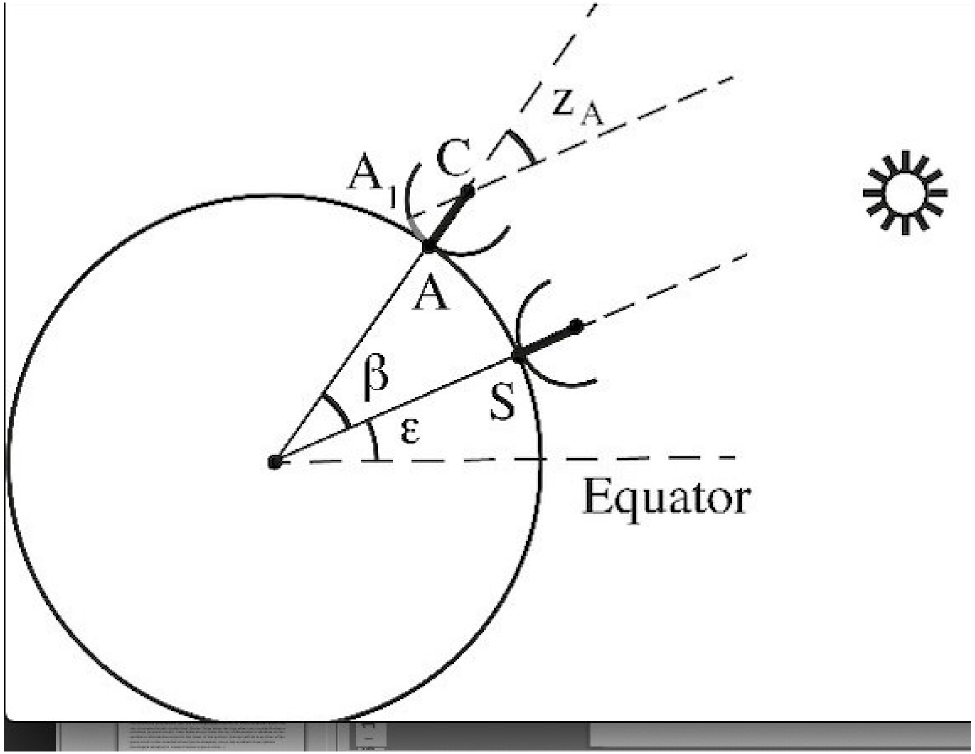
astronomique ou géographique ?



Conclusion

« Donc les arcs de cercle DA) et AS) sont semblables puisque construits sur les angles égaux <AED et <AOS. Et donc ***le rapport de l'arc DA) dans la scaphè à son cercle propre est le même que celui de l'arc SA) Syène Alexandrie à son cercle propre****. Or l'arc DA) dans la scaphè vaut, trouve-t-on, un cinquantième du grand cercle de son cercle propre ; nécessairement donc, la distance SA Syène-Alexandrie doit valoir un cinquantième du grand cercle de la Terre. Or la distance en question est de 5000 stades ; et donc le cercle entier vaut au total 250 000 stades. »*

Le scaphe, modèle du globe céleste



C’est un *horologion gnomon*…

« The shadow arc of the semicircular sundial A_1A is similar to the arc AS measured along the meridian “since they stand on equal angles”: ∠A1CA = zA= β.

Because the arc A_1A is measured to be 1/50 of the full circle, the arc AS is also equal to 1/50 of the circumference of the Earth U. »

Les erreurs systématiques de l’estimation donnée

- Alexandrie (31°12’N, 29°55’E) et Syène (24°5’N, 32°54’E) ne sont pas sur le même méridien. Et Syène n’est pas sur le tropique à l’époque d’Eratosthène : la distance minimale du centre du Soleil à la verticale était de 21’40’’, quant à la mesure à Alexandrie, elle était de 7°28’40’’ et non pas de 7°12’ = 360°/50.

Cleomède discute du résultat…

« On place également, aux solstices d'hiver, des horloges dans les deux villes ; on trouve nécessairement qu'à Alexandrie l'ombre est plus grande, puisque cette ville est plus éloignée du tropique d'hiver. Prenant donc la valeur dont l'ombre à Alexandrie surpasse celle à Syène, on trouve aussi que c'est la cinquantième partie du grand cercle de l'horloge ; de cette façon aussi on se rend compte que le grand cercle de la terre vaut 250 000 stades. Le diamètre de la terre sera alors supérieur à 80 000 stades, s'il doit représenter le tiers du grand cercle. »

Une solution géographique, alternative probable et crédible

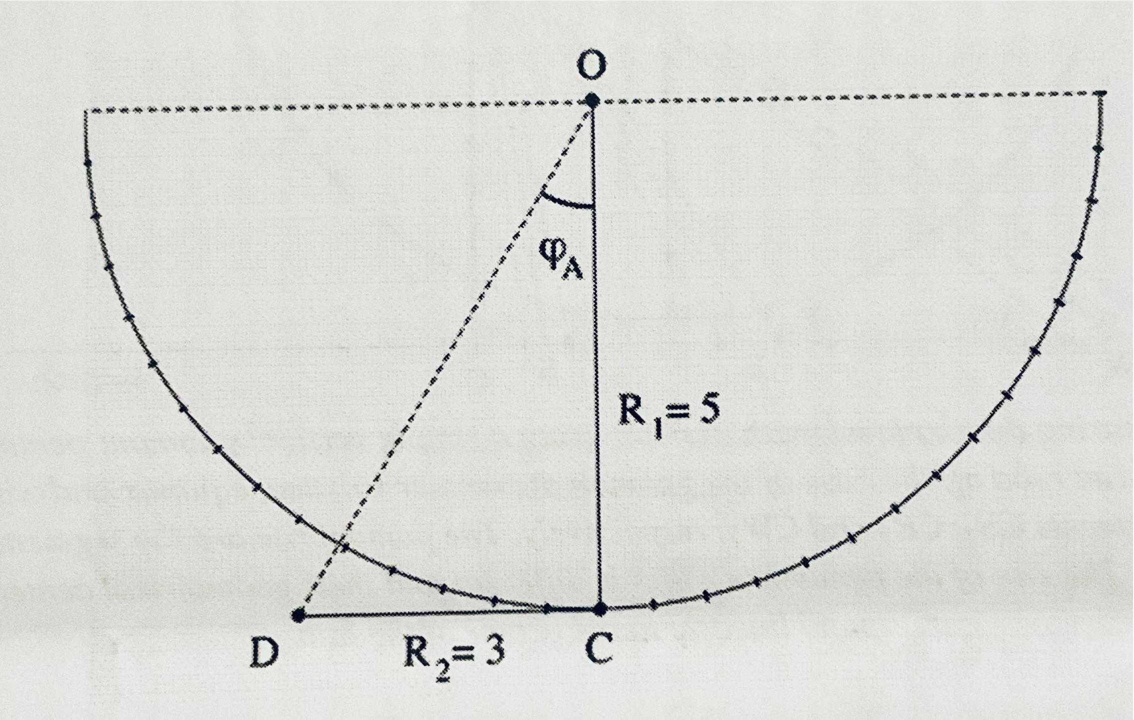
- Nous savons, écrit Tupikova, qu'Eratosthènes avait des informations géographiques sur Syène et bien sûr Alexandrie, et il est probable qu'il les ait utilisées pour une autre estimation.
- Si β, la différence des deux angles d'observation, est connue et mesurée en fractions de grand cercle, la distance étant 5000 stades, la circonférence de la terre est $U=5000/\beta$.

Pourquoi 252000 stades ?

Plutôt que d'imaginer l'usage d'un Scaphè qui reproduit la sphère céleste, si nous partons de l'ombre portée d'un gnomon, mesurée au sol à l'équinoxe, alors la mesure de l'ombre peut être comprise comme celle d'un angle

Le dessin fait passer du *gnomon* au *scaphè* : le rapport *se lit sur le scaphe* ***représenté***

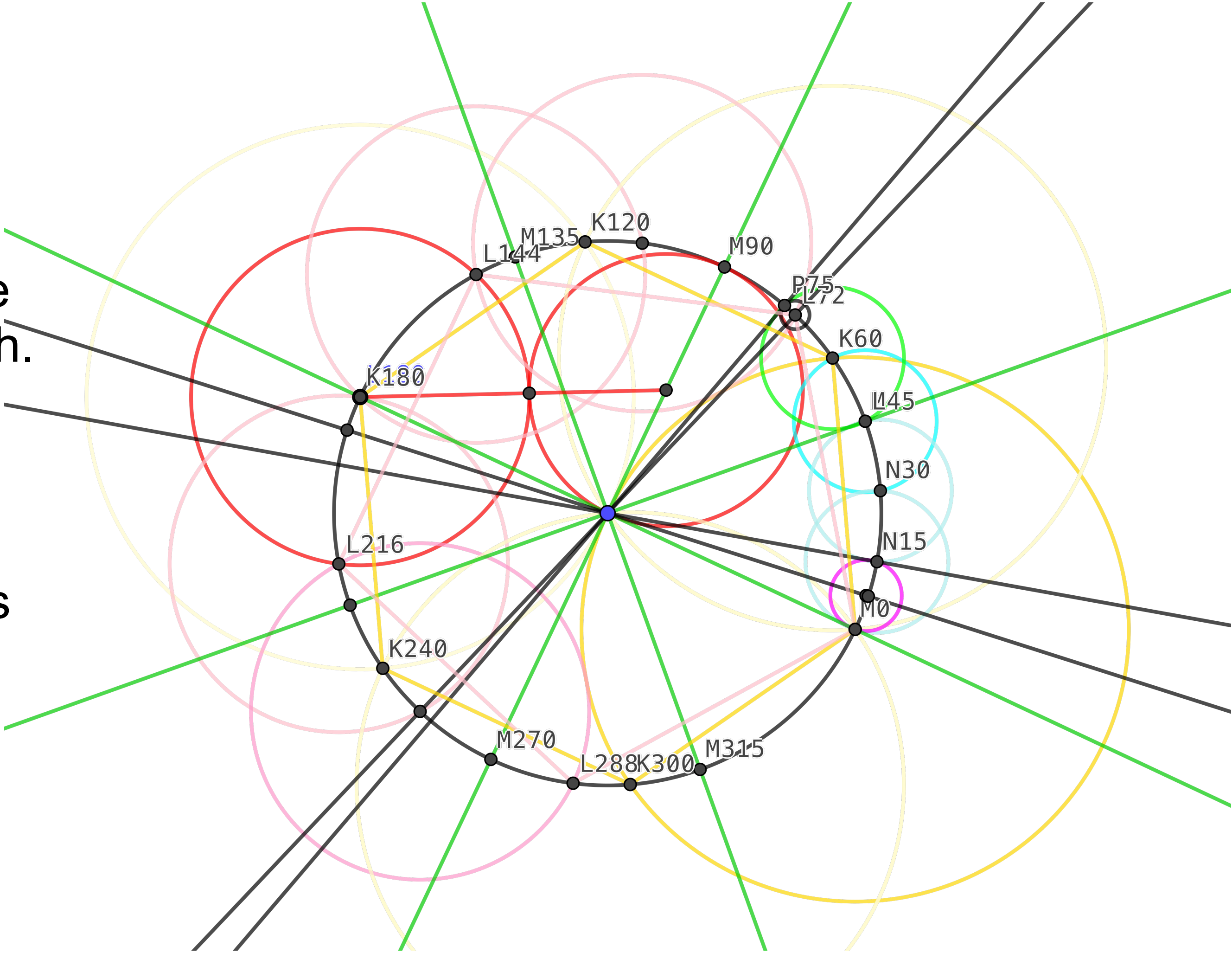
Mais comment évaluer précisément *l'angle*, qui se lit comme *la longueur de l'arc intercepté* ?



Construire les arcs d'une graduation

Rappelons que la *trisection* de tous les angles est impossible « à la règle et au compas » (th. de Wantzel) comme nous l'avons fait ici c'est-à-dire, théoriquement exactes.

Les constructions d'autres points seront donc approchées : de plus en plus précises si l'on veut mais toujours, approchées !



Le calcul en fractions d'un cercle

- Le cercle complet $U=1=11WC+C_{10}W$ (cercles gris). Donc $WC = (U — C_{10}W)/11$

Si le reste $C_{10}W$ était 0 nous aurions terminé car on aurait CW : U :: 1 : 11 (CW est à U ce que 1 est à 11) CW serait la onzième partie du cercle complet.

- Sinon, on construit $R_1C = CW – WR_1$ (par report de C_{10} en R_1 avec le cercle mauve) sachant que $WR_1 = C_{10}W \neq 0$. donc que $C_{10}W = CW – R_1C$ et on a enfin $WC = U/11 + (CW-R_1C)/11$

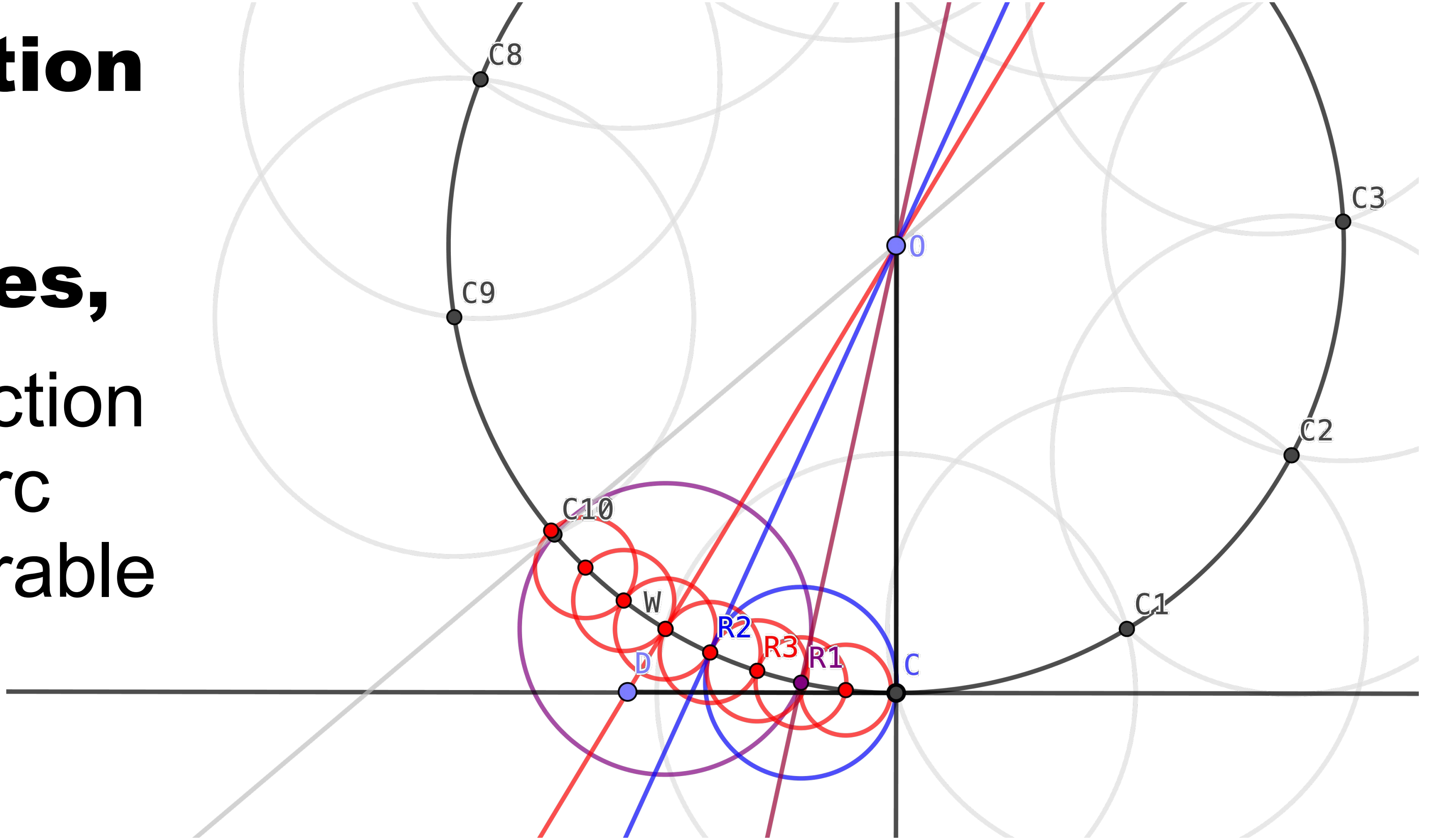
- Le reste R_1C n'est pas 0 car nous aurions terminé alors on construit $R_2W = R_1W — R_1C$ (par report de C en R_2 avec le cercle bleu)

Le reste R_2W n'est pas 0, car nous aurions terminé, alors on construit $R_3R_2 = R_2W$ (par report de R_2 en R_3 avec le cercle en rouge), et on trouve alors que $WR1 = 3.WR_2$ et voilà que cette grandeur divise aussi R_1C donc

$C_{12}W = WR_1 = 3.R_2W$ et que $CW = 5.R_2W$

La construction des différences,

jusqu'à la fraction qui rend l'arc commensurable au cercle



Les raisonnements liés au gnomon

Les mesures sont au sol, et transformées en portions de cercle « comme dans un Scaphè » grâce à la représentation sur une feuille : le modèle géométrique n’est plus inscrit dans l’instrument.

Le procédé est efficace et Ptolémée donne pour CD la valeur 11:83, sans doute obtenue par la méthode présentée.

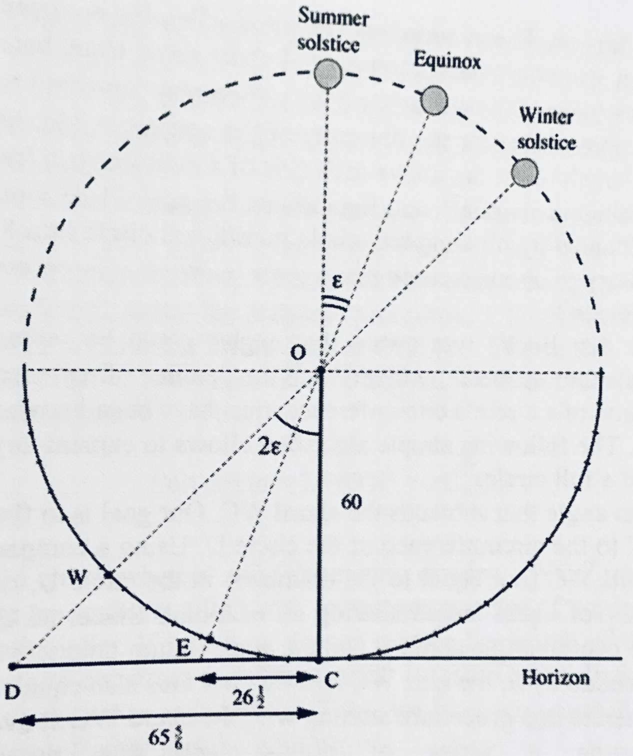


Figure D.1: Measuring the width of the tropic zone. The gnomon ratio at winter solstice at Syene is given as $65\frac{5}{6}$:60. The width of the tropic zone, equal to 2ε, can be read off as the arc $\widehat{WC}$. The gnomon ratio at summer solstice at Syene, given as $26\frac{1}{2}$:60, captures the obliquity of the ecliptic ε, which can be read off as the arc $\widehat{EC}$.

L’angle de l’écliptique

On cherche le rapport de l’arc mesuré,)WC, à la circonférence U

- Le report au compas montre que *)WC* peut être reporté 7 fois sans compléter le tour. 7)WC aboutit en C_6 avant W, le suivant serait au-delà. U=7)WC+)C_6W *(formule f1)*.

Par symétrie $C_6W=WC_7$, et $)C_7C=)WC—)C_6W$

- $C_6C_8—C_7C$ = $)C_8W$ *qui divise)*
- $C_7C=5x)C_8W$ *(formule f2), alors :*
- $)WC=)WC_7+C_7C=)C_6W+)C_7C$

  $=)C_6C_8+)C_8W+5)C_8W \quad =11C_8W$

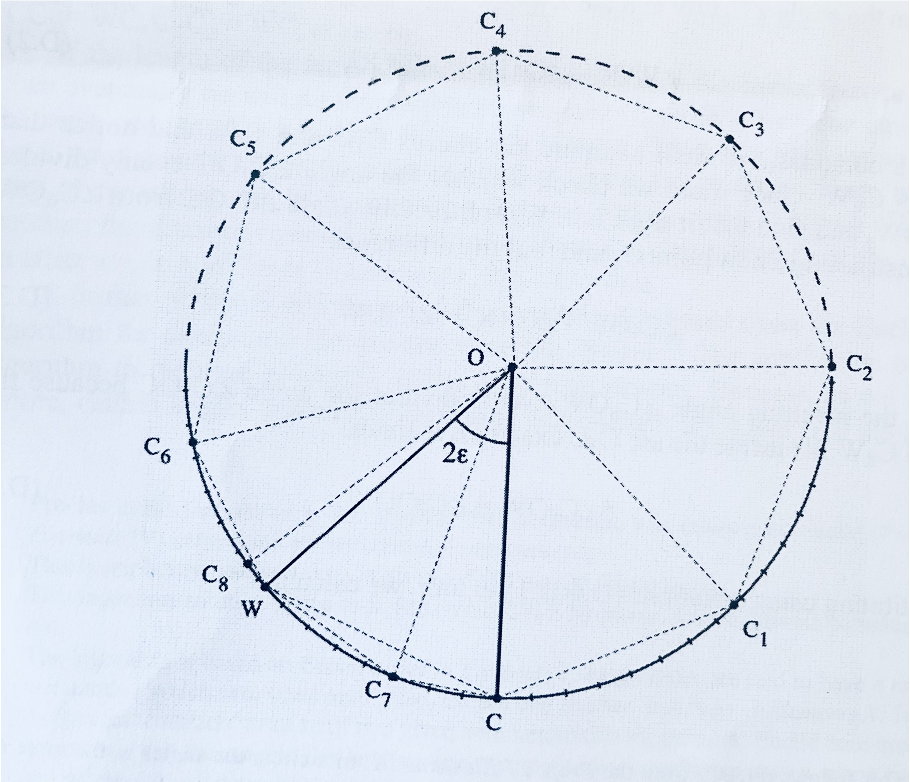


Figure D.2: Calculating the width of the tropic zone as a fraction of a full circle. The observed angle $\angle WOC = 2\varepsilon$ corresponds to the arc $\widehat{WC}$.

Alors, peut-on mesurer des distances avec un Scaphè ?

C’est peut-être la question que pose et résout Ératosthène, bien que nous ne sachions pas précisément la méthode. Il faut pour répondre passer de la sphère céleste au globe terrestre, c’est un saut … audacieux !

- I.V. Tupikova pose ce type de questions mathématiques, en astronomie contemporaine (1983) comme dans l’histoire (2022).
- Le doctorat récent (2022) de C.A. Mattew à l’université de West Sydney explore la question dans le cas d’Eratosthène, en proposant à la fois une étude critique des textes historiques et l’expérimentation des techniques décrites, puis une enquête sur les unités de mesure d’angle (la fraction de cercle) et de longueur (le stade) avec lesquelles est donné le résultat.

On mesure une distance avec un angle, et une mesure !

Il suffirait ici de mesurer au sextant la hauteur angulaire α du rocher **(la hauteur *h=60m* doit être donnée** sur une carte) et sa distance d est $h/\tan\alpha$.

Mais si on imagine que l'angle est proche de celui d'un objet de 1m vu à 10m de distance (le balcon est à 0,6 m, le bateau mesure 10,5m), alors on pense que l'on n'est qu'à 10 fois sa hauteur, 500m peut-être, et que c'est près !

- **N.B. : Un bâton de Jacob suffirait à avoir une évaluation**.